**一、证明在上一致收敛.**

**证明：对通项求导，令**

**，**

**得出全部极值可疑点.因，所以为在上的最大值.如此**

**.**

**因在上收敛，所以由判别法知在上一致收敛.**

**二、证明在内一致收敛.**

**证明 因为**

**.**

**而在上收敛，所以由判别法知在内一致收敛.**

**三. 求下列幂级数的收敛域:**

**(1)*x*+2*x*2+3*x*3+ ⋅ ⋅ ⋅ +*nxn*+ ⋅ ⋅ ⋅;**

**解 , 故收敛半径为*R*=1.**

**因为当*x*=1时, 幂级数成为, 是发散的;**

**当*x*=−1时, 幂级数成为, 也是发散的,**

**所以收敛域为(−1, 1).**

**(2);**

**解 , 故收敛半径为*R*=1.**

**因为当*x*=1时, 幂级数成为, 是收敛的; 当*x*=−1时, 幂级数成为, 也是收敛的, 所以收敛域为[−1, 1].**

**(3);**

**解 , 故收敛半径为*R*=+∞, 收敛域为(−∞, +∞).**

**(4);**

**解 , 故收敛半径为*R*=3.**

**因为当*x*=3时, 幂级数成为, 是发散的; 当*x*=−3时, 幂级数成为, 也是收敛的, 所以收敛域为[−3, 3).**

**(5);**

**解 , 故收敛半径为.**

**因为当时, 幂级数成为, 是收敛的; 当*x*=−1时, 幂级数成为, 也是收敛的, 所以收敛域为.**

**(6);**

**解 这里级数的一般项为. 因为, 由比值审敛法, 当*x*2<1, 即|*x*|<1时, 幂级数绝对收敛; 当*x*2>1, 即|*x*|>1时, 幂级数发散, 故收敛半径为*R*=1. 因为当*x*=1时, 幂级数成为, 是收敛的; 当*x*=−1时, 幂级数成为, 也是收敛的, 所以收敛域为[−1, 1].**

**(7) **

**解 因系数故 **

**因此当，即时级数绝对收敛。**

**当时，得交错级数；当时，得正项级数，二者都收敛，于是原级数的收敛域为**

**(8) **

**解：收敛半径为 ，**

**当时，得级数，发散；**

**当时，得交错级数，收敛。**

**所求收敛域为。**

**四、求幂级数在区间内的和函数**

**解 不难发现，从而，只需求当时和函数的表达式，注意**

****

****

**其中 **

**逐项求导，得 **

**将上式两端的改写成，并分别从到求定积分，可得**

****

**又因，于是 **

**综合以上讨论，即得**

**五、求幂级数的收敛域与和函数。**

**解：此级数是缺项的幂级数**

**令**

****

**当，即时，级数绝对收敛；**

**当，即时，级数发散。**

**级数的收敛域为**

****

**记**

**，**

** **

** **

**注意，积分两次得**

**,**

****

** **

**因此，**

**六、求级数的和。**

**解 先将级数分解：**

****

**第二个级数是几何级数，它的和已知**

****

**求第一个级数的和转化为幂级数求和，考察**

** **

** **

** **

**因此原级数的和 **

**七、设，求**

**解 由 ，有**

****

**令，因其收敛半径，且，故在内有**

****

**于是 **

**令，**

**即得 **

**从而 **

**八、已知满足（为正整数），且，求函数项级数之和。**

**解 由已知条件可知满足一阶线性微分方程**

**其通解为 **

**由条件，得，故从而**

****

**记，其收敛域为时，有**

****

**故 **

**由与在的连续性知，上述和函数公式在处也成立，于是，当时，有**